Кандидат технических наук, СНС, полковник ВВС,
пенсионер МО РФ
Чепраков Владимир Георгиевич

О ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ , ЗАДАЧЕ ГЕРОНА И ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА. ТЕОРЕМА О ТРИАНАХ ©

Пытаясь безуспешно доказать Великую теорему Ферма (ВтФ) с помощью элементарной математики , я вывел параметрические формулы длин сторон целочисленных треугольников.

Это было обусловлено тем, что предполагаемые целочисленные корни (X, Y, Z) уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

представляют собой, независимо от значения целочисленной степени n > 2, длины сторон остроугольного треугольника (“ треугольника Ферма “). Опираясь на эти формулы, я предполагал осуществить полный перебор бесконечного множества остроугольных треугольников. Затея почти безнадежная. Однако на этом пути я получил интересные для любителей математики решения, не относящиеся прямо к ВтФ, которые и предлагаю вашему вниманию.

1. Общие формулы целочисленных треугольников

Множество подобных треугольников (в т.ч. целочисленных) будет однозначно определено заданием двух из трех внутренних углов треугольника, например , двух острых углов α и β , так как третий угол γ найдется из равенства $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Вместо углов можно задать их косинусы (не забудем, что рассматриваем остроугольный треугольник, у которого все углы < 90^0).

Тогда косинус третьего угла $\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta$, (1)

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}.$$

где

Значения косинусов углов α, β, γ целочисленных треугольников, как это легко доказать – рациональные числа и поэтому могут задаваться в виде правильных дробей

cos α **=** r_1/r_2 (2) **;** **cos** β **=** q_1/q_2 **.** (3)

Пары целых положительных чисел (r_1, r_2), а также (q_1, q_2) могут быть разной четности. Косинус угла γ по формуле (1) с учетом (2) и (3) преобразуется к виду (4)

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}\cdot\sqrt{q_2^2 - q_1^2} - r_1\cdot q_1}{r_2\cdot q_2}.$$

Поскольку для целочисленных треугольников величина cosγ - рациональное число, то радикалов в формуле (4) не должно быть. Это означает, что не любые числа r_1,r_2,q_1,q_2 обеспечивают целочисленность длин сторон треугольника, а только те числа, которые обладают особыми свойствами. Определим эти свойства.

Предварительно отметим, что любое натуральное число можно представить в виде произведения двух множителей не обязательно взаимно простых, один из которых - неквадратное число, то-есть является произведением простых чисел со степенями, равными 0 или 1, а другой множитель - квадратное число, представляющее произведение простых чисел со степенями, кратными 2. На основании этого утверждения можно записать подкоренные выражения в формуле (4) в следующем виде

$$r_2^2 - r_1^2 = A\cdot r^2,\ q_2^2 - q_1^2 = B\cdot q^2, \quad (5)$$

где A и B - неквадратные числа. Подставляя (5) в (4), получим

$$\cos\gamma = \frac{r\cdot q\cdot\sqrt{A\cdot B} - r_1\cdot q_1}{r_2\cdot q_2}. \quad (6)$$

Избавиться от радикала $\sqrt{A\cdot B}$ можно только в том случае, когда A=B. Допустим A=B=E, тогда

$$r_2^2 - r_1^2 = E\cdot r^2, \quad q_2^2 - q_1^2 = E\cdot q^2, \quad (5a)$$

то-есть r_1, r_2, q_1, q_2 должны быть решениями диофантовых уравнений типа

$X^2 + D\cdot Y^2 = Z^2$, известных в теории чисел.

Поэтому сразу запишем решение уравнений (5а):

$$r_1 = \frac{1}{2}\cdot(E_2\cdot m_1^2 - E_1\cdot n_1^2),$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\cdot(E_2\cdot m_1^2 + E_1\cdot n_1^2), \quad (7)$$

$$r = n_1\cdot m_1;$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\cdot(E_4\cdot m_2^2 - E_3\cdot n_2^2),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\cdot(E_4\cdot m_2^2 + E_3\cdot n_2^2), \quad (8)$$

$$q = n_2\cdot m_2;$$

$$E_1\cdot E_2 = E_3\cdot E_4. \quad (9)$$

В формулах (7), (8), (9) параметры $n_1, m_1, n_2, m_2, E_1, E_2, E_3, E_4$ - любые натуральные числа, при этом общий наибольший дели – тель пары чисел $\mathbf{E_1}$x$\mathbf{n^2_1}$ и $\mathbf{E_2}$x$\mathbf{m^2_1}$ или пары $\mathbf{E_3}$x$\mathbf{n^2_2}$ и $\mathbf{E_4}$x$\mathbf{m^2_2}$ может быть 1 или 2 . Числа, получаемые по формулам (7), (8) и (9), будут удовлетворять условию целочисленности длин сторон треугольника, для расчета которых мы ещё должны получить формулы. С этой целью воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}. \quad (10)$$

Из пропорций (10) составим систему равенств:

$$
\begin{aligned}
A\cdot\sin\beta &= B\cdot\sin\alpha,\\
A\cdot\sin\gamma &= C\cdot\sin\alpha,\\
B\cdot\sin\gamma &= C\cdot\sin\beta.
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Подставим в равенства (11) следующие значения синусов, полученные с учетом (1),(2), (3), (6) и условием A=B=E

$$
\sin\alpha=\frac{r\cdot\sqrt{E}}{r_2};\ \sin\beta=\frac{q\sqrt{E}}{q_2};\ \sin\gamma=\frac{r_1\cdot q+q_1\cdot r}{r_2\cdot q_2}\sqrt{E}. \qquad (12)
$$

В итоге имеем (см. формулы (11))

$$
\begin{aligned}
&A\cdot q\cdot\sqrt{E}\cdot r_2 = B\cdot r\cdot\sqrt{E}\cdot q_2;\\
&A\cdot\sqrt{E}\cdot(r_1\cdot q+q_1\cdot r)\cdot r_2 = C\cdot r\cdot\sqrt{E}\cdot r_2\cdot q_2;\\
&B\cdot\sqrt{E}\cdot(r_1\cdot q+q_1\cdot r)\cdot q_2 = C\cdot q\cdot\sqrt{E}\cdot r_2\cdot q_2.
\end{aligned}
$$

Сравнивая левые и правые части этих равенств, приходим к следующим результатам :

$$
A=r\cdot q_2 \qquad B=q\cdot r_2 \qquad C=r_1\cdot q+q_1\cdot r \qquad (13)
$$

или с учетом (7), (8), (9)

$$
\begin{aligned}
A &= m_1\cdot n_1\cdot(E_4\cdot m_2^2+E_3\cdot n_2^2),\\
B &= m_2\cdot n_2\cdot(E_2\cdot m_1^2+E_1\cdot n_1^2),\\
C &= m_1\cdot n_1\cdot(E_4\cdot m_2^2-E_3\cdot n_2^2)+m_2\cdot n_2\cdot(E_2\cdot m_1^2-E_1\cdot n_1^2).\\
E_1\cdot E_2 &= E_3\cdot E_4.
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Можно получить несколько модификаций формул (14), если рассмотреть различные случаи, вытекающие из равенства **E_1xE_2=E_3xE_4** . Например, если принять **E_1=E_4 ,E_2=E_3** . Можно и наоборот: **E_1=E_3 и E_2=E_4**.. Ещё больше вариантов формул (14) получим, приняв **E_1=e_1xe_2** и **E_2=e3xe4**,тогда **e_1xe_2xe_3xe_4=E_3xE_4**.

Числа **E_3** и **E_4** могут иметь различное количество множителей из левой части равенства , например , **E_3=e_1xe_3xe_4** и т. д.

Формулы (14) с модификациями охватывают всё бесконечное множество целочисленных треугольников. Они могут служить основой для создания нового раздела математики под пока условным названием " целочисленная геометрия ".

Предлагаю вниманию любителей математики решения ряда задач с использованием общих формул (14) с возможными её модификациями.

2. З А Д А Ч А   П И Ф А Г О Р А

Это одна из древнейших теоретико-числовых задач : найти все прямо угольные треугольники с целочисленными сторонами. Её решение можно найти в любой книге по теории чисел. Поэтому представляет интерес решить задачу Пифагора иным, до сих пор неизвестным способом.

РЕШЕНИЕ

Если один из углов целочисленного треугольника прямой, например , $\alpha=90^0$, то

$$\cos 90 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{E_2 \cdot m_1^2 - E_1 \cdot n_1^2}{E_2 \cdot m_1^2 + E_1 \cdot n_1^2} = 0. \qquad (15)$$

Равенство (15) возможно, **если** $E_2 x m_1^2 = E_1 x n_1^2$ но $E_2 x m_1^2$ и $E_1 x n_1^2$ взаимно простые числа, поэтому должно быть $E_2 = m_1 = E_1 = n_1 = 1$, а следовательно, $E_3 = E_4 = 1$ (см. формулу (9)).

Подставим найденные значения в (14) и получим известные в теории чисел формулы пифагоровых треугольников (индекс 2 у параметров опущен за ненадобностью):

$$A = m^2 + n^2, \quad B = 2mn, \quad C = m^2 - n^2. \qquad (16)$$

3. З А Д А Ч А   Г Е Р О Н А

Необходимо найти формулы, описывающие все треугольники с целочисленными сторонами (A, B, C), площади (S) которых также выражаются целыми числами. Такие треугольники называют **ГЕРОНОВЫ.**

Приведу два высказывания, которые подтверждают новизну и актуальность излагаемого ниже решения:

а). Хотя известно значительное число треугольников Герона, не существует общей формулы, описывающей все эти треугольники (О. ОРЕ, 1980 г.).

б). Увы! Формулы общего решения задачи Герона нет (Б.А.Кордомский, 1983 г.).

РЕШЕНИЕ

Известно много формул вычисления площади треугольника.

воспользуемся одной из них:

$$S=\frac{1}{2}\cdot B\cdot C\cdot\sin\alpha. \qquad (17)$$

Как видно из (12), синусы углов α , β , γ целочисленного треугольника не являются рациональными числами, так как содержат множитель $\sqrt{E}$. Отсюда следует : чтобы треугольник стал **героновым ,** необходимо равенство единице неквадратного числа **E**, а следовательно , и всех его сомножителей, то-есть: $E_1=E_2=E_3=E_4=1$.

Подставим найденные значения множителей E в формулы (12), (14), а затем в (17) и после несложных преобразований получим общее решение **ЗАДАЧИ ГЕРОНА:**

$$\begin{aligned} k\cdot A&=m_1\cdot n_1\cdot(m_2^2+n_2^2),\\ k\cdot B&=m_2\cdot n_2\cdot(m_1^2+n_1^2),\\ k\cdot C&=(m_1\cdot m_2-n_1\cdot n_2)\cdot(m_1\cdot n_2+n_1\cdot m_2), \end{aligned} \qquad (18)$$

$$S=\frac{1}{k^2}\cdot m_1\cdot n_1\cdot m_2\cdot n_2\cdot(m_1\cdot m_2-n_1\cdot n_2)\cdot(m_1\cdot n_2+n_1\cdot m_2), \qquad (19)$$

где k - общий множитель.

ПРИМЕР

$m_1=7, n_1=1, m_2=13, n_2=1.$

По формулам (18), (19) получим :

k= 10 , A= 119 , B= 65 , C= 180 , S= 1638 .

4. Задача о трисекции угла

Выведем формулы длин сторон треугольника, один угол которого в 3 раза больше другого. Для решения этой задачи воспользуемся известным тригонометрическим соотношением :

$$\cos\alpha = \cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta.$$

Это равенство с учетом [(2),(3), см. **стр. 1**] ; (8), см. **стр. 2** ; (14), см. **стр.3** преобразуется к виду

$$\frac{E_2 m_1^2 - E_1 n_1^2}{E_2 m_1^2 + E_1 n_1^2} = \frac{4q_1^3 - 3q_2^2 q_1}{q_2^3}. \qquad (20)$$

Левая и правая части уравнения (20) - правильные обыкновенные дроби , поэтому можно записать

$$E_2 m_1^2 - E_1 n_1^2 = 4q_1^3 - 3q_2^2 q_1; \qquad (21)$$
$$E_2 m_1^2 + E_1 n_1^2 = q_2^3.$$

Подставим значения q_1 и q_2 из (8) и преобразуем уравнения (21) к виду

$$2E_2 m_1^2 = 2E_4[m_2(E_4 m_2^2 - 3E_3 n_2^2)]^2,$$
$$2E_1 n_1^2 = 2E_3[n_2(3E_4 m_2^2 - E_3 n_2^2)]^2.$$

Отсюда очевидно, что

$$E_2 = E_4, \quad E_1 = E_3,$$
$$m_1 = m_2(E_4 m_2^2 - 3E_3 n_2^2),$$
$$n_1 = n_2(3E_4 m_2^2 - E_3 n_2^2).$$

Полученные соотношения позволяют преобразовать формулы (14), (см. **стр.3**) в следующие выражения :

$$a = (m - 3n)\cdot(3m - n)\cdot(m + n),$$

$$b = (m + n)^3, \qquad (22)$$

$$c = 4(m - n)\cdot[(m - n)^2 - 4mn],$$

где под **m** обозначено число $E_4 m_2^2$, под **n** - $E_3 n_2^2$,

m , n – любые рациональные числа.

Выражения **(22)** упростим, разделив каждое на n^3. Получим окончательные формулы длин сторон треугольника, у которого один угол (α) больше другого (β) в 3 раза :

$$a = (p-3)\cdot(3p-1)\cdot(p+1),$$
$$b = (p+1)^3, \qquad \textbf{(23)}$$
$$c = 4(p-1)\cdot[(p-1)^2 - 4p],$$

где

где $7 \le p \le \infty$. (см. ниже график на рис.2)

На рис. 2 показана зависимость заданного угла $\alpha = 3\beta$ от параметра **p**, с помощью которого определяются длины сторон треугольника (**a** , **b** , **c**) по формулам **(23)**. Этот треугольник обладает особенностью : **он представляет собой стыковку двух равнобедренных треугольников (см. рис. 1) ACk и AkB .**
Эта особенность позволяет заданный угол $\alpha = 3\beta$ разделить на три равные части **с помощью циркуля и линейки путем последовательных проб, в том числе углов** $135^\circ \angle\alpha\angle 180^\circ$, если представить $\alpha = 90^\circ + \Delta\alpha$. Угол $\Delta\alpha$ делится на три части описанным выше способом, а угол 90° разделить на три части – проще простого.

В.Г.ЧЕПРАКОВ , 2006г.

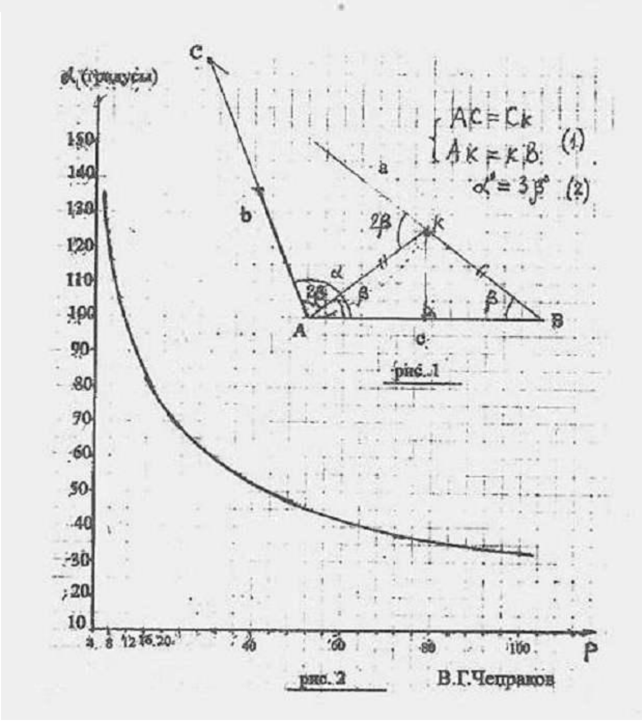

Рис.2

Т Е О Р Е М А О ТРИАНАХ

В любом, например остроугольном треугольнике **ABC** через середину медианы **Bb** (точку **e**) и вершину **C** проведена прямая до пересечения со стороной **AB**(**см. рис.1**).

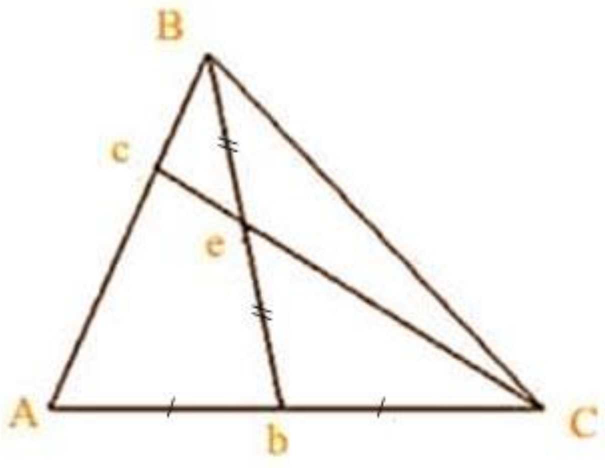

рис. 1

Доказать, что отрезок **Bc** в три раза меньше стороны **AB** **,** а отрезок **ce** в четыре раза меньше прямой **Cc** (отрезок Cc назовём трианой по аналогии с медианой).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведем медиану ba треугольника **BbC** (**см.рис.2**).

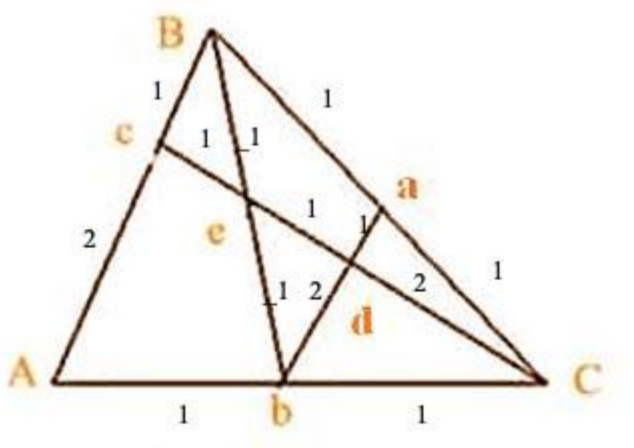

рис. 2

Точка **d** - пересечение медиан **Ce** и **ba** треугольника **BbC** . На основании теоремы о медианах имеем

3ed = **eC** и **db**=**2ad** . (1)

Так как отрезок **ba** соединяет середины сторон **AC** и **BC**, то он является средней линией этого треугольника. Согласно теореме о средней линии отрезок **ab** параллелен стороне **AB**, следовательно

AB = **2ab** , **Bba** = **cBe** , **ceB** = **bed** . (2)

Кроме того, по условию теоремы **Be**= **be** .

Таким образом, треугольники **ecB** и **bed** равны , а следовательно

ce = **ed** и **cB**= **bd** . (3)

Прямая **Cc** представляет собой сумму отрезков **ce** и **eC** , т.е. **Cc** = **ce** + **eC** , но **eC** = **3ed** (см. (1)) или **eC** = **3ce** (см. (3)), поэтому **Cc** = **ce** + **3ce = 4 ce** , другими словами, отрезок **ce** в четыре раза меньше отрезка

Cc (ч.т.д.). Далее имеем : **AB** = **ba** =**3ad** ; (см. (1), (3)) , но

ad **cB**=**bd** .Отсюда **AB** =**3 cb** или **cb** =**AB** , (ч.т.д.).

В.Г.Чепраков, 1997 г.

Послесловие. На основании теоремы о трианах решить две задачи, пользуясь только циркулем и линейкой без делений.

Задача 1. Разделить на три равные части заданный отрезок.

Задача 2. Найти одну девятую часть площади заданного треугольника (вар. А) или одну девятую часть площади заданного прямоугольника (вар.Б).

Персональный сайт: http://cheprakov.narod.ru

Владимир Георгиевич Чепраков